УДК 514.75

О ГРАФИКАХ ОСНОВНЫХ ТИПОВ БИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВЫХ n-ПРОСТРАНСТВ

Л.И.А л е к с е е в а

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе дана геометрическая характеристика основных типов биконформных отображений [1] евклидовых n-пространств с привлечением графика отображений [2].

1.Пусть f -диффеоморфизм области $\Omega \subset E_n$ на область $\bar{\Omega} \subset \bar{E}_n$, и поверхность V_n^* -график этого отображения. Область Ω отнесем к ортонормированному реперу $R^{x_1} = (x_1, \vec{e}_i)$ ($i,j,k = \overline{1,n}$), построенному на касательных к линиям основания σ_n отображения f [2], а область $\bar{\Omega}$ - к реперу $R^{x_2} = (x_2, \vec{e}_{n+i})$, причем $\vec{e}_{n+i} = f_{*x_1}(\vec{e}_i)$ (f_{*x_1} -индуцированное отображение). Тогда с графиком V_n^* инвариантно связан репер $R^x = (x, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_{n+i})$, построенный на касательных к линиям соответствующей сети σ_n^*, где

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i - \gamma_{ik}\bar{\gamma}^{kj}\vec{e}_{n+j}, \quad \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{n+i}, \quad \gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad \bar{\gamma}_{ij} = \vec{e}_{n+i} \cdot \vec{e}_{n+j},$$

$$g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j, \quad \bar{g}_{ij} = \vec{\varepsilon}_{n+i} \cdot \vec{\varepsilon}_{n+j},$$

при этом

$$\bar{\gamma}_{ij} \cdot \bar{\gamma}^{jk} = \delta_i^k, \quad g_{ij} = \gamma_{ij} + \bar{\gamma}_{ij}, \quad \bar{g}_{ij} = \gamma_{il}\bar{\gamma}^{lk} g_{kj}. \qquad (I)$$

Деривационные формулы этих реперов имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{x}_1 = \omega^i \vec{e}_i, & d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j, \\ d\vec{x}_2 = \bar{\omega}^i \vec{e}_{n+i}, & d\vec{e}_{n+i} = \bar{\omega}_i^j \vec{e}_{n+j}, \\ d\vec{x} = \theta^i \vec{\varepsilon}_i, & d\vec{\varepsilon}_i = \theta_i^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_i^{n+j} \vec{\varepsilon}_{n+j}, \\ \quad d\vec{\varepsilon}_{n+i} = \theta_{n+i}^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_{n+i}^{n+j} \vec{\varepsilon}_{n+j}, & \end{cases} \qquad (2)$$

где $\omega^i = \bar{\omega}^i$ - дифференциальные уравнения отображения f.

Так как репер R^{x_1} -ортонормированный, то из (I) имеем:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}, \quad g_{ii} = 1 + \bar{\gamma}_{ii}, \quad \bar{g}_{ii} = \frac{1 + \bar{\gamma}_{ii}}{\bar{\gamma}_{ii}}, \quad \bar{\gamma}_{ij} = g_{ij} = \bar{g}_{ij} = 0 \ (i \neq j), \qquad (3)$$

и формы, входящие в формулы (2), удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \omega_i^i = 0, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i \neq j), \\ \bar{\omega}_i^i = \frac{1}{2} d\ln \bar{\gamma}_{ii}, \quad \bar{\gamma}_{ii}\bar{\omega}_j^i + \bar{\gamma}_{jj}\bar{\omega}_i^j = 0 \quad (i \neq j), \\ \theta_i^i = \frac{d\bar{\gamma}_{ii}}{2(1+\bar{\gamma}_{ii})}, \quad g_{ii}\theta_j^i + g_{jj}\theta_i^j = 0 \quad (i \neq j), \\ \theta_i^{n+i} = -\frac{d\bar{\gamma}_{ii}}{2(1+\bar{\gamma}_{ii})}, \quad \omega_i^j - \bar{\omega}_i^j = \frac{1+\bar{\gamma}_{jj}}{\bar{\gamma}_{jj}}. \end{cases} \tag{4}$$

В репере R^* поверхность V_n^* определяется системой уравнений $\theta^{n+i} = 0$, продолжение которой имеет вид:

$$\theta_i^{n+j} = b_{ik}^{n+j}\theta^k, \tag{5}$$

где функции $b_{ik}^{n+j} = b_{ki}^{n+j}$ определяют второй тензор поверхности V_n^*.

Формы ω_i^j, $\bar{\omega}_i^j$, θ_i^j $(i \neq j)$ -главные:

$$\omega_i^j = a_{ik}^j\omega^k, \quad \bar{\omega}_i^j = \bar{a}_{ik}^j\omega^k, \quad \theta_i^j = t_{ik}^j\theta^k. \tag{6}$$

При продолжении дифференциальных уравнений отображения f получим:

$$\omega_i^j - \bar{\omega}_i^j = h_{ik}^j\omega^k, \quad h_{ik}^j = h_{ki}^j. \tag{7}$$

В силу (4) и (5) имеем:

$$h_{ik}^j = \frac{1+\bar{\gamma}_{jj}}{\bar{\gamma}_{jj}} b_{ik}^{n+j}. \tag{8}$$

Откуда следует, что функции h_{ik}^j определяют поле тензора.

2. А.М.Васильев ввел естественное обобщение понятия конформного отображения римановых пространств - бикон/формное отображение.

Определение. Отображение $f: E_n \to \bar{E}_n$ называется биконформным, если в областях $\Omega \subset E_n$ и $\bar{\Omega} \subset \bar{E}_n$ существуют пары ортогональных распределений Δ_p и Δ_{n-p} в Ω и $\bar{\Delta}_p$ и $\bar{\Delta}_{n-p}$ в $\bar{\Omega}$ таких, что ограничения отображения f на плоскости $\Delta_p(x_1)$ и $\Delta_{n-p}(x_1)$ являются конформными.

Пусть распределение Δ_p натянуто на векторные поля $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$, а распределение Δ_{n-p} - на векторные поля $\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n$. Тогда в области $\bar{\Omega}$ им соответствуют взаимно ортогональные распределения $\bar{\Delta}_p(\vec{e}_{n+1}, \ldots, \vec{e}_{n+p})$ и $\bar{\Delta}_{n-p}(\vec{e}_{n+p+1}, \ldots, \vec{e}_{2n})$, а на графике V_n^* инвариантным образом определяются распределения $\Delta_p^*(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$ и $\Delta_{n-p}^*(\vec{\varepsilon}_{p+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$.

Условие биконформности означает, что

$$\bar{\gamma}_{tt} = \alpha \quad (t, s, q = \overline{1,p}), \quad \bar{\gamma}_{uu} = \beta \quad (u, v, w = \overline{p+1,n}), \tag{9}$$

где α и β -коэффициенты конформности. Формулы (3) для соответствующих наборов индексов запишутся в виде:

$$\begin{cases} g_{tt} = 1+\alpha, \quad \bar{g}_{tt} = \frac{1+\alpha}{\alpha}, \\ g_{uu} = 1+\beta, \quad \bar{g}_{uu} = \frac{1+\beta}{\beta}. \end{cases} \tag{10}$$

С помощью этих соотношений из (4) и (5) получим:

$$\begin{cases} b_{sj}^{n+s} = b_{tj}^{n+t} \quad (s \neq t), \quad b_{uj}^{n+u} = b_{vj}^{n+v} \quad (u \neq v), \\ b_{tj}^{n+s} = -b_{sj}^{n+t} \quad (s \neq t), \quad b_{vj}^{n+u} = -b_{uj}^{n+v} \quad (u \neq v), \end{cases} \tag{11}$$

$b_{tq}^{n+s} = 0$ (s, t, q -различ.), $b_{vw}^{n+u} = 0$ (u, v, w -различ.).

3. По аналогии с Б.Гланц [1] выделим основные типы биконформных отображений евклидовых n-пространств, используя тензор отображения h_{ij}^k. Но так как выполняются формулы (8), то требования можно накладывать на второй тензор графика V_n^*.

Систему (7) в биконформном случае запишем в виде:

$$\begin{cases} \omega_t^s - \bar{\omega}_t^s = \frac{1+\alpha}{\alpha}(b_{tq}^{n+s}\theta^q + b_{tu}^{n+s}\theta^u), \\ \omega_u^s - \bar{\omega}_u^s = \frac{1+\alpha}{\alpha}(b_{ut}^{n+s}\theta^t + b_{uv}^{n+s}\theta^v), \\ \omega_s^u - \bar{\omega}_s^u = \frac{1+\beta}{\beta}(b_{st}^{n+u}\theta^t + b_{sv}^{n+u}\theta^v), \\ \omega_v^u - \bar{\omega}_v^u = \frac{1+\beta}{\beta}(b_{vt}^{n+u}\theta^t + b_{vw}^{n+u}\theta^w). \end{cases} \tag{12}$$

Отсюда выделяются основные типы биконформных отображений:

$$\begin{cases} f_1: \ b_{tq}^{n+s} = 0, \quad f_2: \ b_{tu}^{n+s} = 0, \quad f_3: \ b_{st}^{n+u} = 0, \\ f_1': \ b_{vw}^{n+u} = 0, \quad f_2': \ b_{vt}^{n+u} = 0, \quad f_3': \ b_{uv}^{n+t} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Используя соотношения (4)-(6), (9)-(11) для соответствующего набора индексов, можно показать, что отображения f_1, f_2 имеют следующие геометрические характеристики.

Т е о р е м а I. Биконформное отображение будет отображением типа f_1

а) тогда и только тогда, когда $\alpha = const$ вдоль интегральных кривых распределения Δ_p [1];

б) тогда и только тогда, когда для любой кривой γ^* графика V_n^*, принадлежащей распределению Δ_p^*, соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(x,\gamma^*)$ ортогональна инвариантной плоскости $(x, \vec{\varepsilon}_{n+1}, \dots, \vec{\varepsilon}_{n+p})$.

Т е о р е м а 2. Биконформное отображение будет отображением типа f_2 тогда и только тогда, когда распределение Δ_p (а значит, и распределения $\bar{\Delta}_p$ и Δ_p^*) вполне интегрируемо, и $\alpha = const$ вдоль интегральных кривых распределения Δ_p [I].

При этом на одномерных нормалях $(x, \vec{\varepsilon}_u)$ к поверхности V_p^* абсциссы псевдофокусов F_u^s совпадают с абсциссами соответствующих псевдофокусов на нормалях $(x_1, \vec{e}_u)$ к поверхности V_p (на нормалях $(x_2, \vec{e}_{n+u})$ к поверхности $\bar{V}_p$), где V_p, $\bar{V}_p$ и V_p^* -интегральные многообразия распределений $\Delta_p, \bar{\Delta}_p$ и Δ_p^* соответственно.

Т е о р е м а 3. Биконформное отображение будет отображением типа f_3 тогда и только тогда, когда линии ткани $\Sigma_p^* \subset \Delta_p^*$ сопряжены относительно конусов $\Phi^{n+u} = 0$, и псевдофокусы F^s_{n+u} на прямых $(x, \vec{\varepsilon}_{n+u})$ являются несобственными точками.

В этом случае имеем:

$$a^u_{ts} = \frac{(1+\alpha)\, b^{n+t}_{us}}{\beta - \alpha}, \qquad a^u_{ts} = \bar{a}^u_{ts}.$$

С л е д с т в и е I. Ткань Σ_p на распределении Δ_p (ткань $\bar{\Sigma}_p$ на распределении $\bar{\Delta}_p$) сопряжена тогда и только тогда, когда распределение Δ_p вполне интегрируемо.

С л е д с т в и е 2. Ткань Σ_p на распределении Δ_p (ткань $\bar{\Sigma}_p$ на распределении $\bar{\Delta}_p$) состоит из асимптотических линий тогда и только тогда, когда $\alpha = const$ вдоль распределения Δ_{n-p}.

Аналогично можно сформулировать признаки для биконформных отображений типа f_1', f_2', f_3', воспользовавшись формулами (4)-(6),(9)-(II) для соответствующего набора индексов.

Библиографический список

I.Г л а н ц Б. Распределения и биконформные отображения римановых пространств: Автореф.дис.канд.физ.-мат.наук.М.,1988.

2.Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств //Вопросы дифференциальной геомет-

рии: Уч.зап./МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1970.Т.I №374.С.41-51.

УДК 514.75

К ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Б.А.А н д р е е в

(Калининградский ун-т)

Изучается дифференцируемое отображение $f: P_m \to P_n$ проективных пространств произвольных размерностей. Доказано, что фундаментальным объектом 2-го порядка отображения f для каждой точки $P \in P_m$ определяется отображение h, названное характеристическим отображением в точке P, которое определено на пространстве гиперплоскостей в P_n, не инцидентных точке $f(P)$, и принимает значение в пространстве линейных семейств гиперквадрик пространства P_m. Более подробно изучен случай субмерсии $(m \geqslant n)$. Получен ряд теорем, в которых показано, что характеристическое отображение в точке P определяет конус характеристических прямых в этой точке и характеристические гомографии на них. Исследование отображения f проводится с помощью метода продолжений и охватов и носит локальный характер. Индексы принимают следующие значения: $\mathcal{J}, \dots = \overline{1,m}$; $i, \dots = \overline{1,n}$; $\mathcal{J}', \dots = \overline{0,m}$; $i', \dots = \overline{0,n}$.

I. Фундаментальный объект 2-го порядка отображения f.

Пусть P_m и P_n -два проективных пространства, отнесенные соответственно к подвижным реперам $R = \{\bar{R}_{\mathcal{J}'}\}$, $\tau = \{\bar{\tau}_{i'}\}$, деривационные формулы которых имеют вид:

$$d\bar{R}_{\mathcal{J}'} = \Omega^{K'}_{\mathcal{J}'} \bar{R}_{K'}; \qquad d\tau_{i'} = \omega^{j'}_{i'} \tau_{j'}, \tag{I}$$

причем выполняется:

$$D\Omega^{K'}_{\mathcal{J}'} = \Omega^{L'}_{\mathcal{J}'} \wedge \Omega^{K'}_{L'}; \qquad D\omega^{j'}_{i'} = \omega^{k'}_{i'} \wedge \omega^{j'}_{k'}. \tag{2}$$

Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: P_m \to P_n$, имеющее максимальный возможный ранг в каждой точке области определения: $rang\, f = min\,(m,n)$. Поместим вершину R_0 репера R в произвольную точку P области определения отображения f, а вершину τ_0 репера τ в соответствующую ей точку $p = f(P) \in P_n$. Указанные реперы будем называть реперами нулевого порядка отображения f. В этих реперах структурными формами пространств